

GLI STATI STAZIONARI DEL SISTEMA PROTONE-ELETTRONE IN UN CONTINUO NON EUCLIDEO.

Nota del Professor **don Carlo Borghi** (1910-1984) R. Università di Milano

Riproposta da **Ubaldo Mastromatteo**

STMicronics – Via Tolomeo, 1 – 20010 Cornaredo – MI

Ubaldo.Mastromatteo@st.com

SOMMARIO

Stabilite le trasformazioni dell'equazione di Shrödinger in un continuo localmente non-euclideo, si mostra che da esse deriva l'esistenza di una barriera dell'atomo di idrogeno. Inoltre si mostra l'esistenza di stati stazionari dell'elettrone all'interno di tale barriera, e si mostrano le caratteristiche trasformazioni che queste particolari condizioni apportano sia all'elettrone sia al sistema elettrone interno-protone.

1. – Equazione di Schrödinger generalizzata.

Nell'equazione relativistica di Shrödinger per l'idrogeno¹

$$\Delta_2 \psi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left\{ \left(W + \frac{e^2}{r} \right)^2 - \mu^2 \right\} \psi = 0 \quad (1)$$

dove $\mathbf{W}=\mathbf{E}+\boldsymbol{\mu}$; $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{m}\mathbf{c}^2$, l'operatore Δ_2 , relativisticamente invariante, e' esprimibile mediante i coefficienti della metrica \mathbf{ds}^2 dello spazio in cui viene considerato immerso l'elettrone \mathbf{e} , con l'espressione²

$$\Delta_2 = |a_{ik}|^{-1/2} \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \left[|a_{ik}|^{1/2} \sum_i a^{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \right] \quad (2)$$

dove a^{il} ed a_{il} sono i suddetti coefficienti controvarianti e covarianti.

Per un campo gravitazionale, la metrica viene data dalla nota equazione di Schwarzschild³

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) c^2 dt^2 \quad (3)$$

da cui ponendo

$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi, A = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \quad (4)$$

si hanno i coefficienti in questione

¹ L. De Broglie, Electron Magnetique, 1934, pg. 101 ss

² T. Levi Civita, Calcolo Differenziale Assoluto, 1933, pg. 176

³ Lane, Theorie de la Relativite', Paris 1925, II, pg. 229

$$a_{i\ell} = \begin{vmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{vmatrix}$$

e per la parte spaziale il determinante $|a_{ik}|$ risulta

$$|a_{ik}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{r^2 \sin \vartheta}$$

così che la (2) diventa

$$\Delta_2 = \frac{\sqrt{A}}{r^2 \sin \vartheta} \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{A}} a^{\ell\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right)$$

ossia $\Delta_2 = \frac{\sqrt{A}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ (5)

che in un continuo euclideo diviene la ben nota formula (A=1)

$$\overset{0}{\Delta}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6)$$

Confrontando (5) con (6) si osserva che, passando da un continuo euclideo ad uno non-euclideo, di Δ_2 si trasforma soltanto la parte radiale e non quella angolare.

Ora, se l'osservatore è posto in un continuo euclideo, ed invece l'elettrone viene osservato in un continuo localmente non-euclideo, nell'equazione (1) l'operatore Δ_2 dovrà rappresentarsi mediante la (6). La stessa osservazione si potrà fare anche nel caso di diversa non-euclidicità del continuo in cui è posto l'osservatore rispetto a quello in cui è osservato l'elettrone. La costante α che entra nel parametro di curvatura \mathbf{A} , dovrà essere definita volta a volta dall'intensità e dal tipo di campo gravitazionale che genera la non-euclidicità locale dello spazio in cui opera l'elettrone. Inoltre, da (3) si deduce che la non-euclidicità locale opera nelle coordinate le trasformazioni

$$dr' = \frac{dr}{\sqrt{A}} \quad dt' = \sqrt{A} dt \quad (7)$$

e poiché in (1) il secondo addendo corrisponde al termine temporale dell'operatore d'alambertiano \mathbf{D}_2 che dà la propagazione delle onde di De Broglie concatenate all'elettrone, tale secondo addendo, per la (7) andrà diviso per \mathbf{A} .

In conclusione otterremo l'equazione di Shrödinger generalizzata per un continuo localmente non-euclideo:

$$\frac{\sqrt{A}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{A} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{A(\hbar c)^2} \left\{ \left(W + \frac{e^2}{r} \right)^2 - \mu^2 \right\} \psi = 0 \quad (8)$$

La funzione d'onda Ψ si può fattorizzare in $\psi = R(r)\phi(\vartheta, \varphi)$ (9)
 così che la (8) si scinde nelle due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = -\lambda \phi \\ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{A} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{r}{\hbar c} \right)^2 \left\{ \left(W + \frac{e^2}{r} \right)^2 - \mu^2 \right\} R = \lambda R \end{array} \right. \quad (10), (11)$$

dove λ è una costante, determinata dalla (10) già nota dall'equazione normale di Shrödinger⁴

$$\begin{aligned} \lambda &= \ell(\ell + 1) \\ \ell &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

dove ℓ com'è noto, è il corrispondente ondulatorio del quanto azimutale. Il fattore Φ risulta pure, dalla discussione già nota della (10):⁵

$$\phi_{m\ell} = \left[\frac{(\ell m)!(2\ell + 1)}{4\pi(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\varphi} \sin^m \vartheta \frac{d^m P_\ell}{d(\cos \vartheta)^m} \quad (13)$$

dove m è il quanto magnetico, e P_ℓ i polinomi sferici di Legendre.

2. Calcolo della “zona proibita”.

Ponendo

$$p = \frac{2}{r\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial r} \quad B = \frac{2mE}{A^2 \hbar^2} \left(1 + \frac{E}{2\mu} \right) \quad C = \frac{2me^2}{A^2 \hbar^2} \left(1 + \frac{E}{\mu} \right)$$

$$D = \frac{\ell(\ell + 1)}{A} + \frac{f^2}{A^2} \quad f = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{costante di struttura fine}) \quad (14)$$

la (11) diviene

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + p \frac{\partial R}{\partial r} + \left\{ B + \frac{C}{r} + \frac{D}{r^2} \right\} R = 0 \quad (15)$$

che per $r \Rightarrow \infty$ tende all'equazione

⁴ Cf. E. Persico, Fondamenti di Meccanica Atomica, 1936, pg. 216 ss.

⁵ E. Persico, op. cit. pg. 222

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + BR = 0 \quad \text{che ha soluzione} \quad R = e^{-\sqrt{-B}r}$$

per cui porremo $x = 2\sqrt{-B}r$ e $\alpha_1 = 2\sqrt{-B}\alpha$ (16)

$$R = e^{-\frac{x}{2}} \rho(x) \quad (17) \quad \text{essendo } \rho(x) \text{ una funzione da determinare.}$$

Con facili trasformazioni si ottiene quindi $\left(\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial x} \text{ ecc.}\right)$:

$$\rho'' + \rho' \left[\frac{2}{x} + \frac{\alpha_1}{(x - \alpha_1)x} - 1 \right] + \left\{ \left[\frac{C}{2\sqrt{-B}} - 1 + \frac{\alpha_1}{(x - \alpha_1)x} \right] \frac{1}{x} + \frac{D}{x^2} \right\} \rho = 0 \quad (18)$$

Sviluppando la funzione $\rho(x)$ in serie di potenze di (x) : $\rho = x^\gamma \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ (19)

la (18) diviene

$$x^\gamma \sum_0^\infty a_\nu x^\nu \left\{ \frac{(v + \gamma)(v + \gamma - 1)}{x^2} + \frac{(v + \gamma)}{x} \left[\frac{2}{x} + \frac{\alpha_1}{x(x - \alpha_1)} - 1 \right] + \frac{1}{x} \left[\frac{C}{2\sqrt{-B}} + \frac{\alpha_1}{(x - \alpha_1)x} - 1 \right] + \frac{D}{x^2} \right\} = 0$$

(20)

che ha due singolarita' fuchsiane nei punti $x = 0$ e $x = \alpha_1$

Nel polo $x = 0$, per $\nu = 0$, essendo $a_0 \neq 0$, si ha

$$\gamma(\gamma + 1) + \alpha\sqrt{-B}\gamma + \frac{f^2}{A^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{A} = 0 \quad (21)$$

da cui si ottiene

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{A\ell(\ell + 1) - f^2}{A^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

che ha valori estremi

$$r \gg \alpha \quad A \approx 1 \quad \gamma = -\frac{1}{2} + \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - f^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \alpha \quad A = 0 \quad \gamma = -\infty(1 + i)$$

$$r = 0 \quad A = -\infty \quad \gamma = 0 \quad (23)$$

di cui il primo e' il valore usualmente impiegato nella teoria ondulatoria della struttura fine.

Per il polo $A=0$ invece, la (18) si riduce ad essere identicamente nulla, e non da' alcuna indicazione utile.

Raccogliendo ora in (18) il coefficiente di $x^{\nu-2}$, ed eguagliandolo a zero, si ottiene

$$a_{\nu-1} \left[\gamma + \nu - 1 - \frac{C}{2\sqrt{-B}} + \frac{\alpha_1}{x - \alpha_1} \right] = a_{\nu} \left[(\nu + \gamma)(\nu + \gamma + 1) + \frac{\alpha_1}{x - \alpha_1} + D \right]$$

e perche' per una $s = \nu + 1$, si abbia $a_{\nu} \neq 0$, $a_{\nu-1} = 0$ e cosi' la funzione si riduca ad un polinomio, occorre che sia

$$\gamma + s - \frac{C}{2\sqrt{-B}} + \frac{\alpha_1}{x - \alpha_1} = 0 \quad (24)$$

con $s =$ numero intero; cioe', mettendo il valore dei vari simboli

$$f \sqrt{\frac{\mu}{-2E}} \frac{1 + \frac{E}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{E}{2\mu}}} = \left(s + \frac{1}{2} \right) + \frac{A-1}{A} - \left[\frac{1}{4} + \frac{A\ell(\ell+1) - f^2}{A^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

quadrando ed aggiungendo l'unita' ad entrambi i membri di (25), se ne ha:

$$\frac{E}{\mu} = \left[1 + f^2 \left\{ s + \frac{1}{2} + \frac{1-A}{A} \left(\frac{1}{4} + \frac{A\ell(\ell+1) - f^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (26)$$

Con lo sviluppo di Taylor, per $A > 0$, nell'intorno del punto $\frac{f^2}{A^2}$ si ha

$$E = -\frac{me^4}{2A^2 n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{f^2}{A^2 n^2} \left(\frac{n}{n_1} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right] \quad (27)$$

espressione che essendo in generale A assai prossimo all'unita', per r sufficientemente grande rispetto ad α , coincide perfettamente con la nota formula di Shrödinger per la struttura fine⁶, pero' con

$$\left\{ \begin{aligned} n_1 &= \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{A} \ell(\ell+1) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1-A}{A} \ell(\ell+1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ n &= s + \frac{1}{2} + n_1 \end{aligned} \right. \quad (28), (29)$$

Siccome $A \gtrsim 0$ secondo che $r \gtrsim \alpha$, la radice al denominatore entro la parentesi di (26) si annulla per

⁶ cf. L. De Broglie, op. Cit., pg. 104

$$\begin{cases} A_+ = 2\sqrt{\ell^2(\ell+1)^2 + f^2} - 2\ell(\ell+1) & r > \alpha \\ A_- = -2\sqrt{\ell^2(\ell+1)^2 + f^2} - 2\ell(\ell+1) & r < \alpha \end{cases} \quad (30)$$

ossia, quando $\ell = 0$, per i due valori di r

$$\begin{cases} r_+ = \frac{\alpha}{1-2f} = \frac{137}{135}\alpha & r > \alpha \\ r_- = \frac{\alpha}{1+2f} = \frac{137}{139}\alpha & r < \alpha \end{cases} \quad (31)$$

E' facile vedere che per un elettrone **esterno** ad $r = \alpha$, l'energia diventa immaginaria per $r < r_+$; e che per l'elettrone **interno** ad $r = \alpha$, l'energia puo' essere immaginaria quando sia $r < r_-$. Percio' la zona di spessore

$$r_+ - r_- = \frac{4 \cdot 137}{135 \cdot 139} \alpha = 0,0280 \cdot \alpha \quad (32)$$

corrisponde a stati di energia sempre immaginaria. E poiche' un'energia immaginaria e' priva di qualsiasi senso fisico, tale zona deve considerarsi come **zona proibita**, in cui cioe' non c'e' alcuna probabilita' di trovare l'elettrone. Essa si comporta quindi come una superficie di repulsione tanto per gli elettroni esterni quanto per gli elettroni interni. Ha quindi i caratteri di cio' che e' postulato nella fisica nucleare come barriera nucleare. Ora, dalla teoria della Relativita' Generale si ha, com'e' noto, per la costante α la relazione

$$\frac{\alpha}{r} = 2 \frac{kM}{c^2 r} \quad \text{con } M = \text{massa del sole}$$

Dove K e' la costante del campo gravitazionale. Questa relazione si puo' scrivere nella forma

$$\frac{\alpha}{r} = 2 \frac{\left| \frac{kMm}{r} \right|}{mc^2} = 2 \frac{(\text{energia potenziale})}{(\text{energia intrinseca})}$$

Nel caso che il campo gravitazionale sia quello elettrostatico, come nel caso dell'idrogeno, avremo quindi

$$\frac{\alpha}{r} = 2 \frac{e^2}{\mu r} \quad (33)$$

cioe', in generale essendo Z il numero atomico dell'atomo idrogenoide:

$$\frac{\alpha}{r} = 2 \frac{Ze^2}{\mu} \quad (33')$$

Perciò il raggio \hat{r} che dà la superficie di simmetria della zona proibita nel caso dell'idrogeno risulta

$$\alpha = \hat{r} = 5,54 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (34)$$

e lo spessore della zona stessa verrà dato da

$$\sigma_0 = r_+ - r_- = 2 \times 7,756 \cdot 10^{-15} \text{ cm} = 1,551 \cdot 10^{-14} \text{ cm} \quad (35)$$

La lunghezza $\alpha = 2 \frac{e^2}{\mu}$ risulta il doppio del raggio classico dell'elettrone (α_0).

3.0 - Stati interni e stati esterni

I risultati ottenuti per $\ell = 0$, si possono generalizzare per un qualsiasi valore del numero quantico ℓ . La funzione che determina la realtà dell'energia è

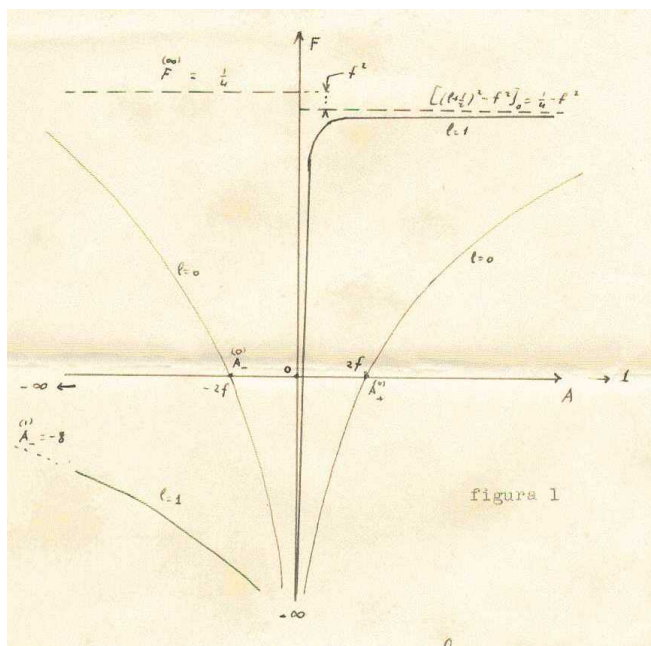
$$F = \frac{1}{4} + \frac{A\ell(\ell+1) - f^2}{A^2} \quad (36)$$

che si annulla per i valori dati in (30), ossia quando r ha i valori

$$\begin{aligned} r_+^{(\ell)} &= \frac{\alpha}{1 + 2\ell(\ell+1) - 2\sqrt{\ell^2(\ell+1)^2 + f^2}} \\ r_-^{(\ell)} &= \frac{\alpha}{1 + 2\ell(\ell+1) + 2\sqrt{\ell^2(\ell+1)^2 + f^2}} \end{aligned} \quad (37)$$

Per i valori di r compresi tra questi due (per ogni ℓ) la funzione F è negativa, quindi le energie immaginarie. L'andamento della P in funzione di A è schematicamente indicato nella figura 1, ed i valori in questione sono indicati dalla tabella annessa: lo spessore della zona proibita per ciascun numero quantico ℓ viene indicato con

$$\sigma_\ell = \alpha \frac{4\sqrt{\ell^2(\ell+1)^2 + f^2}}{1 + 4\ell(\ell+1) - 4f^2} \quad (38)$$



l	$\frac{r_+^{(l)}}{\alpha}$	$\frac{r_-^{(l)}}{\alpha}$	σ/α	$A_+^{(l)}$	$A_-^{(l)}$
0	1,014	0,985	0,0280	2f	-2f
1	1	0,111	0,889	0	-8
2	1	0,040	0,960	0	-24
3	1	0,020	0,980	0	-48
4	1	0,012	0,988	0	-80
∞	1	0,000	1,000	0	$-\infty$

Commento per i lettori.

La nota originale e' costituita da un documento dattiloscritto (con le formule aggiunte a mano) di quindici pagine di cui, per ragioni di spazio, si e' voluta fin qui riproporre la prima parte, che e' quella piu' significativa.

Durante il lavoro di trascrizione sono state corrette un paio di imprecisioni nelle formule dell'originale (essenzialmente la mancanza di segni meno all'esponente), ma senza creare alcun effetto sullo sviluppo dei passaggi successivi, segno evidente che anche l'originale e' derivato da una elaborazione molto piu' ricca di dettagli e passaggi intermedi di cui non si ha traccia, ma che si puo' ritenere sottoposti ad una verifica molto accurata da parte di don Borghi stesso. La data del documento originale e' Dicembre 1942 e in quel periodo don Borghi era professore di Fisica Teorica e Statistica presso la Regia Univerista' di Milano.

L'approccio originale oltre ad essere interessante di per se', riveste una grande attualita' per le possibili spiegazioni di fenomenologie nucleari anomale per la quali si ipotizza la formazione di particelle neutre a partire da isotopi dell'idrogeno. La trattazione che abbiamo sopra esposto ne deriva l'esistenza utilizzando strumenti matematici validi anche oggi utilizzandoli con rigore. Inoltre, l'ipotesi della non-euclidicit  dello spazio che appare solo alla fine di questa prima parte ci sembra del tutto condivisibile se si accetta la validita' della Teoria della Relativita' Generale.

Ubaldo Mastromatteo